

$$\dim V^* = \dim \operatorname{Hom}(V, K) = \dim V \times 1 \\ = \dim V$$

$$\dim(V^{**}) = \dim V^* = \dim V$$

$$(V^*)^* = \operatorname{Hom}(V^*, K)$$

$K$  un corp de Caractéristique  $p > 0$

$$\begin{aligned} \text{Can}_K: \mathbb{Z} &\longrightarrow K \\ n &\longrightarrow n \cdot 1_K = \underbrace{1_K + \dots + 1_K}_{n \text{ fois}} \end{aligned}$$

$$\text{Ker Can}_K = p \cdot \mathbb{Z}$$

$$n \cdot 1_K = n_K = 0_K \text{ si } p \mid n$$

$$\text{en particulier } p_K = p \cdot 1_K = 0_K$$

$$\text{Si } V = K\text{-ev} \quad e \in V$$

$$\underbrace{(e + \dots + e)}_{p \text{ fois}} = p_K \cdot e = O_K \cdot e = O_V$$

$$V = K \quad x \in V \quad p_K \cdot x = O_K \cdot x = O_K \cdot$$

$$(x + y)^p = x^p + y^p \quad \text{si } \text{Car } K = p.$$

$$= x^p + C_p^1 x^{p-1} y + C_p^2 x^{p-2} y^2 + \dots + C_p^{p-1} x y^{p-1} + 1_K y^p$$

$$\text{si } 0 < k < p \quad p \mid C_p^k \quad C_p^k = O_K$$

$$V = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

une forme linéaire

$$e_1^* : \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R}^2}}{(x, y)} \longrightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R}}}{x} \quad e_2^* : (x, y) \longrightarrow y$$

$$e_1^* + 2e_2^* : (x, y) \longrightarrow x + 2y$$

$$\begin{aligned} V^* &= \{ \ell : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid \ell \text{ linéaire} \} \\ &= \{ (x, y) \longrightarrow ax + by \mid a, b \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

$V^*$  est engendré par  $e_1^*$  et  $e_2^*$

$\{e_1^*, e_2^*\}$  est libre. si  $a, b \in \mathbb{R}$  tq

$$ae_1^* + be_2^* = \underline{0}_{\mathbb{R}}$$

$$\forall (x, y) \quad (ae_1^* + be_2^*)(x, y) = ax + by = 0$$

$$\Rightarrow a = b = 0$$

$$V = \{ P(x) \text{ de } d^{\circ} \leq 2 \}$$
$$= \{ aX^2 + bX + c \quad a, b, c \in \mathbb{R} \}$$

$$\text{ev}_{\sqrt{2}}: P(X) \longrightarrow P(\sqrt{2}) \in \mathbb{R}$$

$\text{ev}_{\sqrt{2}}$  est linéaire.

$V^*$  est de dim 3

$$\text{base: } e_2^{\vee} : aX^2 + bX + c \mapsto a$$

$$e_1^{\vee} : aX^2 + bX + c \mapsto b$$

$$e_0^{\vee} : aX^2 + bX + c \mapsto c$$

$$\{e_0^{\vee}, e_1^{\vee}, e_2^{\vee}\} = \text{base de } \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$$

$$\text{base dual de la de } \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$$

$$\{1=X^0, X=X^1, X^2\}$$

Def:  $e_i^*$

Soit  $\{e_1, \dots, e_d\}$  = base de  $V$

tout vecteur  $v \in V$  s'écrit

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_d e_d \quad x_i \in K$$

et cette écriture est unique.

Soit  $e_1^*: V \longrightarrow K$  est linéaire.

$$V \longrightarrow K \quad e_i^* \in V^* \quad i=1, \dots, d$$



$$\{e_1^*, \dots, e_d^*\} \subset V^*$$

C'est une base de  $V^*$  (toute fct  
linéaire  $\ell: V \rightarrow \mathbb{R}$  est CL  
(unique) de  $\{e_1^*, \dots, e_d^*\}$

$$e_1^*(e_1) = e_1^*(1 \cdot e_1 + 0e_2 + \dots + 0e_d)$$

$$e_2^*(e_1) = 1 \cdot e_2^*(1 \cdot e_1 + 0e_2 + \dots + 0e_d) = 0$$

$$e_d^*(e_1) = \begin{cases} 1 & \text{si } d=1 \\ 0 & \text{si } d \neq 1 \end{cases}$$

Plus généralement

$$e_d^*(e_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=d \\ 0 & \text{si } i \neq d \end{cases}$$

## Ex 8 Serie 7:

$k \subset K$  inclusion de Corps alors

$K$  est un  $k$ -ev:

$(K, +)$  est un gp. commutatif  
qui possède une multiplication par les  
scalaires (de  $k$ )

$k \times K \longrightarrow K$  qui a les propriétés  
 $(\lambda, x) \longrightarrow \lambda \times_K x$  attendues pour un  
 $k$ -ev parce que  
 $K$  est un corps

$$\text{Si } \text{Car}(K) = p$$

$$\text{Can}_K: \mathbb{Z} \rightarrow K$$

$$\text{Can}_K(\mathbb{Z}) \text{ est un sous anneau} \\ \sim \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$$

$$1_K, 2_K, \dots, (p-1)_K, p_K = 0_K, (p+1)_K = 1_K$$

$$\text{et si } n = r + pm \quad 0 \leq r \leq p-1$$

$$n_K = (r + pm)_K = r_K + p_K m_K = r_K$$

Rappel si  $0 \leq r < r' \leq p-1$

alors  $r_k \neq r'_k$  car sinon

$$(r' - r)_k = 0 \Leftrightarrow p \mid r' - r \Rightarrow r' = r$$

$$0 \leq r' - r \leq p-1$$